Pre-Cálculo
Guía de Estudio

Centro Psicopedagógico La Paz

14 de septiembre de 2025

Índice general

Resumen

El curso de **Pre-Cálculo** tiene como propósito fundamental proporcionar al estudiante una base sólida para el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, desarrollando habilidades algebraicas, gráficas y analíticas esenciales. A lo largo de ocho módulos progresivos, se abordan temas fundamentales como el álgebra, funciones, ecuaciones, trigonometría y límites, preparando al estudiante para enfrentar con éxito desafíos académicos en matemáticas superiores y ciencias aplicadas.

Este documento está diseñado como un conjunto de *apuntes de apoyo para el estudiante*, presentando de forma estructurada la teoría, ejemplos visuales, ejercicios resueltos paso a paso y actividades prácticas. Se hace énfasis en la comprensión conceptual, la interpretación gráfica y la aplicación de herramientas tecnológicas para el análisis de funciones y resolución de problemas matemáticos.

El enfoque didáctico del material promueve el razonamiento lógico y la autonomía en el aprendizaje, buscando que el estudiante no solo memorice fórmulas, sino que entienda el significado detrás de los conceptos y su utilidad en el mundo real. Cada módulo incluye recursos gráficos y una progresión temática cuidadosamente organizada para favorecer el aprendizaje gradual y significativo.

Palabras clave: Álgebra, funciones, trigonometría, límites, razonamiento matemático, preparación para el cálculo.

Introducción

El estudio del **Pre-Cálculo** constituye un puente esencial entre la matemática escolar y el Cálculo universitario. Es en esta etapa donde el estudiante consolida herramientas fundamentales que le permitirán interpretar, modelar y resolver situaciones tanto abstractas como del entorno real mediante funciones y razonamiento algebraico.

En este curso se introducen conceptos clave como el dominio y rango de funciones, el comportamiento gráfico de distintas expresiones algebraicas, y la comprensión de las propiedades de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Asimismo, se explora la noción intuitiva del límite, elemento crucial para el desarrollo posterior del cálculo diferencial.

Cada módulo está diseñado de manera didáctica, incluyendo ejemplos resueltos, figuras explicativas y ejercicios de aplicación. Se ha cuidado especialmente la presentación visual del contenido para mejorar la comprensión, incorporando gráficos, tablas y cajas de color para destacar fórmulas, definiciones y soluciones.

El material está orientado a estudiantes de último año de educación media o de primer año universitario, y puede utilizarse como recurso complementario en clases presenciales, virtuales o en autoaprendizaje. Su estructura modular permite una progresión temática flexible, adaptable al ritmo y necesidades del estudiante.

El Pre-Cálculo no solo enseña a resolver problemas: enseña a pensar matemáticamente. Este curso es la antesala de una aventura más profunda en el universo del Cálculo.

Capítulo 1

Fundamentos de Álgebra y Números Reales

1.1. Introducción

El álgebra es la base de las matemáticas superiores. En este módulo revisaremos los conceptos fundamentales necesarios para el estudio del precálculo.

1.2. Conjuntos numéricos

Definición 1.1. *Los principales conjuntos numéricos son:*

- ***Números naturales*** *($\mathbb{N}$):* $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- ***Números enteros*** *($\mathbb{Z}$):* $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- ***Números racionales*** *($\mathbb{Q}$):* $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
- ***Números irracionales****: Números que no pueden expresarse como fracción (ej: π, e, $\sqrt{2}$)*
- ***Números reales*** *($\mathbb{R}$): La unión de todos los números racionales e irracionales*

1.3. Jerarquía de operaciones

Definición 1.2. *El orden correcto para realizar operaciones es:*

1. *Paréntesis y otros signos de agrupación*
2. *Exponentes y raíces*
3. *Multiplicación y división (de izquierda a derecha)*
4. *Adición y sustracción (de izquierda a derecha)*

Ejemplo 1.3. *Evalúe la expresión:* $5 + 3 \times (8 - 2)^2 \div 4$
Solución:

$$\begin{aligned} 5 + 3 \times (8 - 2)^2 \div 4 &= 5 + 3 \times (6)^2 \div 4 \quad \textit{(Paréntesis)} \\ &= 5 + 3 \times 36 \div 4 \quad \textit{(Exponentes)} \\ &= 5 + 108 \div 4 \quad \textit{(Multiplicación)} \\ &= 5 + 27 \quad \textit{(División)} \\ &= 32 \quad \textit{(Adición)} \end{aligned}$$

1.4. Propiedades de los números reales

Definición 1.4. *Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

- ***Conmutativa***: $a + b = b + a$, $ab = ba$
- ***Asociativa***: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$
- ***Distributiva***: $a(b + c) = ab + ac$
- ***Elemento neutro***: $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$
- ***Elemento inverso***: $a + (-a) = 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ *(para $a \neq 0$)*

1.5. Expresiones algebraicas

Definición 1.5. *Una expresión algebraica es una combinación de variables y constantes mediante operaciones algebraicas.*

Ejemplo 1.6. *Simplifique la expresión:* $3(2x - 5y) + 2(4x + y)$
Solución:

$$\begin{aligned} 3(2x - 5y) + 2(4x + y) &= 6x - 15y + 8x + 2y \\ &= (6x + 8x) + (-15y + 2y) \\ &= 14x - 13y \end{aligned}$$

1.6. Productos notables y factorización

Definición 1.7. *Algunos productos notables importantes:*

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo 1.8. *Factorice completamente:* $x^2 - 5x + 6$
Solución: *Buscamos dos números que sumados den -5 y multiplicados den 6. Estos son -2 y -3.*

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

1.7. Ejercicios de repaso

1. Clasifique los siguientes números: $\sqrt{9}, \frac{2}{3}, -\pi, 0, 5.\overline{6}$
2. Evalúe: $12 - 4 \times (3^2 - 8) \div 2$
3. Simplifique: $4(3x - 2y) - 3(2x - 5y)$
4. Desarrolle: $(2x - 3)^2$
5. Factorice: $x^2 + 7x + 12$

Resumen En este módulo hemos revisado los conceptos fundamentales de álgebra: conjuntos numéricos, propiedades de los números reales, jerarquía de operaciones, simplificación de expresiones algebraicas, productos notables y factorización. Estos conceptos son esenciales para el estudio de los temas posteriores.

Capítulo 2

Ecuaciones e Inecuaciones

2.1. Introducción

Las ecuaciones e inecuaciones son herramientas fundamentales para modelar y resolver problemas matemáticos. En este módulo aprenderemos a resolver diferentes tipos de ecuaciones e inecuaciones.

2.2. Ecuaciones lineales

Definición 2.1. *Una ecuación lineal es una igualdad algebraica que involucra polinomios de primer grado. Tiene la forma general:*

$$ax + b = 0$$

donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Ejemplo 2.2. *Resuelva:* $3x - 7 = 2x + 5$
Solución:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 2x + 5 \\ 3x - 2x &= 5 + 7 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

2.3. Ecuaciones cuadráticas

Definición 2.3. *Una ecuación cuadrática es una igualdad algebraica de segundo grado. Tiene la forma general:*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Ejemplo 2.4. *Resuelva:* $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solución: *Factorizamos:*

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad o \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

2.4. Ecuaciones con valor absoluto

Definición 2.5. *El valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|$, se define como:*

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.6. *Resuelva:* $|2x - 3| = 7$
Solución:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7 \quad o \quad & 2x - 3 &= -7 \\ 2x &= 10 & 2x &= -4 \\ x &= 5 & x &= -2 \end{aligned}$$

2.5. Ecuaciones racionales

Definición 2.7. *Una ecuación racional es aquella que contiene fracciones algebraicas.*

Ejemplo 2.8. *Resuelva:* $\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x^2-x-2}$
Solución: *Factorizamos el denominador:* $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$
Multiplicamos ambos lados por el MCD: $(x-2)(x+1)$

$$\begin{aligned} 3(x+1) + 2(x-2) &= 5 \\ 3x + 3 + 2x - 4 &= 5 \\ 5x - 1 &= 5 \\ 5x &= 6 \\ x &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Verificamos que la solución no haga cero los denominadores.

2.6. Inecuaciones lineales

Definición 2.9. *Una inecuación lineal es una desigualdad que involucra polinomios de primer grado.*

Ejemplo 2.10. *Resuelva:* $3x - 7 < 2x + 5$
Solución:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &< 2x + 5 \\ 3x - 2x &< 5 + 7 \\ x &< 12 \end{aligned}$$

La solución es: $(-\infty, 12)$

2.7. Inecuaciones cuadráticas

Definición 2.11. *Una inecuación cuadrática es una desigualdad que involucra polinomios de segundo grado.*

Ejemplo 2.12. *Resuelva:* $x^2 - 5x + 6 > 0$
Solución: *Factorizamos:* $(x-2)(x-3) > 0$

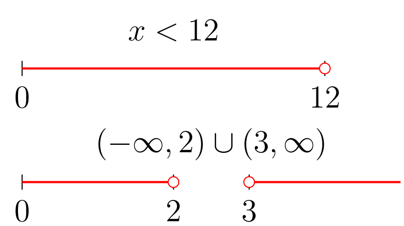
Los puntos críticos son $x = 2$ *y* $x = 3$*. Analizamos los intervalos:*

- $(-\infty, 2)$*:* $(+)(+) = + \to$ *Cumple la desigualdad*
- $(2, 3)$*:* $(+)(-) = - \to$ *No cumple*
- $(3, \infty)$*:* $(-)(-) = + \to$ *Cumple*

La solución es: $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

2.8. Representación gráfica de soluciones

Podemos representar las soluciones de inecuaciones en la recta numérica:



2.9. Ejercicios de evaluación

1. Resuelva: $5x - 3 = 2x + 9$
2. Resuelva: $x^2 - 4x - 5 = 0$
3. Resuelva: $|3x + 2| = 8$
4. Resuelva: $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} = 1$

5. Resuelva: $2x + 7 \geq 3x - 5$
6. Resuelva: $x^2 + 3x - 10 < 0$

Resumen En este módulo hemos aprendido a resolver diferentes tipos de ecuaciones (lineales, cuadráticas, con valor absoluto y racionales) e inecuaciones (lineales y cuadráticas). También hemos visto cómo representar gráficamente las soluciones de inecuaciones en la recta numérica.

Capítulo 3

Funciones y sus Representaciones

3.1. Introducción

El concepto de función es fundamental en matemáticas y tiene aplicaciones en diversas áreas. Una función describe la relación entre dos cantidades variables.

3.2. Definición de función

Definición 3.1. *Una función f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento y de B. Se denota por:*

$$f : A \to B \quad o \quad y = f(x)$$

Ejemplo 3.2. *Determine si las siguientes relaciones representan funciones:*

1. $\{(1,2),(3,4),(1,5),(6,7)\} \to$ *No es función (el 1 tiene dos imágenes)*

2. $\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\} \to$ *Sí es función*

3.3. Dominio y rango

Definición 3.3.

- *El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida.*

- *El **rango** de una función es el conjunto de todos los valores de salida que resultan de evaluar la función en su dominio.*

Ejemplo 3.4. *Encuentre el dominio y rango de $f(x) = \sqrt{x-2}$*
Solución:

- *Dominio:* $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \to [2, \infty)$

- *Rango:* $\sqrt{x-2} \geq 0 \to [0, \infty)$

3.4. Notación funcional

La notación $f(x)$ se lee "f de xz representa el valor de la función cuando la variable independiente es x.

Ejemplo 3.5. *Si* $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, *encuentre:*

1. $f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
2. $f(2) = 2(4) - 3(2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$
3. $f(-1) = 2(1) - 3(-1) + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$

3.5. Representaciones de funciones

Las funciones pueden representarse de diferentes maneras:

3.5.1. Representación verbal

Descripción en palabras de la relación entre variables.

Ejemplo 3.6. *.El área de un círculo es igual a pi por el radio al cuadrado."*

3.5.2. Representación algebraica

Fórmula matemática que relaciona las variables.

Ejemplo 3.7. $A(r) = \pi r^2$

3.5.3. Representación tabular

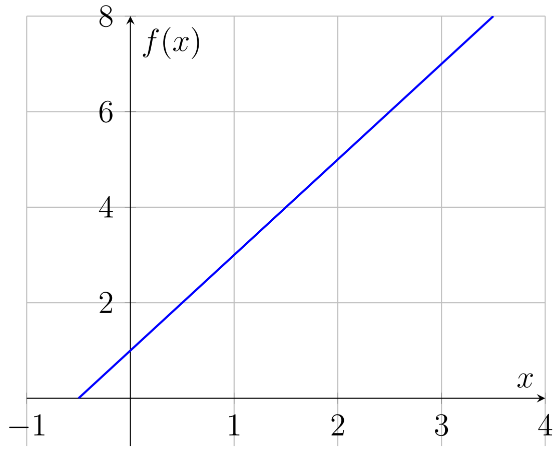
Tabla de valores que muestra pares entrada-salida.

Ejemplo 3.8.

x	*0*	*1*	*2*	*3*
$f(x)$	*1*	*3*	*5*	*7*

3.5.4. Representación gráfica

Gráfica en el plano cartesiano que muestra la relación.



3.6. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g, podemos definir:

- **Suma**: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Resta**: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Multiplicación**: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **División**: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para $g(x) \neq 0$
- **Composición**: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Ejemplo 3.9. *Si $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 3x - 1$, encuentre:*

1. $(f+g)(x) = (x+2) + (3x-1) = 4x + 1$

2. $(f \circ g)(x) = f(3x-1) = (3x-1) + 2 = 3x + 1$

3.7. Taller de funciones

1. Determine si las siguientes relaciones representan funciones:

   a) $\{(2,3),(4,5),(6,7),(8,9)\}$

   b) $\{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5)\}$

2. Encuentre el dominio y rango de:

   a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

   b) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

3. Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calcule:

   a) $f(0)$
   b) $f(-1)$
   c) $f(2)$

4. Dadas $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$, encuentre:
   a) $(f + g)(x)$
   b) $(f \circ g)(x)$
   c) $(g \circ f)(x)$

Resumen En este módulo hemos estudiado el concepto fundamental de función, sus elementos (dominio y rango), diferentes formas de representación (verbal, algebraica, tabular y gráfica) y operaciones entre funciones. Estos conceptos son la base para el estudio de tipos específicos de funciones en los próximos módulos.

Capítulo 4

Funciones Lineales y Cuadráticas

4.1. Introducción

Las funciones lineales y cuadráticas son dos de los tipos más importantes de funciones en matemáticas. Tienen aplicaciones en física, economía, ingeniería y muchas otras áreas.

4.2. Funciones lineales

Definición 4.1. *Una función lineal es una función de la forma:*

$$f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente y b es la intersección con el eje y.

4.2.1. Pendiente de una recta

Definición 4.2. *La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4.2.2. Formas de la ecuación de una recta

- **Forma pendiente-intersección**: $y = mx + b$
- **Forma punto-pendiente**: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- **Forma general**: $Ax + By + C = 0$

Ejemplo 4.3. *Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(4, 7)$.*

Solución:

$$\begin{aligned} m &= \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y - 3 &= 2(x-2) \\ y - 3 &= 2x - 4 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

4.3. Funciones cuadráticas

Definición 4.4. *Una función cuadrática es una función de la forma:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

4.3.1. Propiedades de las parábolas

La gráfica de una función cuadrática es una parábola con las siguientes propiedades:

- **Vértice**: Punto máximo o mínimo de la parábola
- **Eje de simetría**: Recta vertical que pasa por el vértice
- **Concavidad**: Determina si la parábola abre hacia arriba ($a > 0$) o hacia abajo ($a < 0$)

4.3.2. Vértice y eje de simetría

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$:

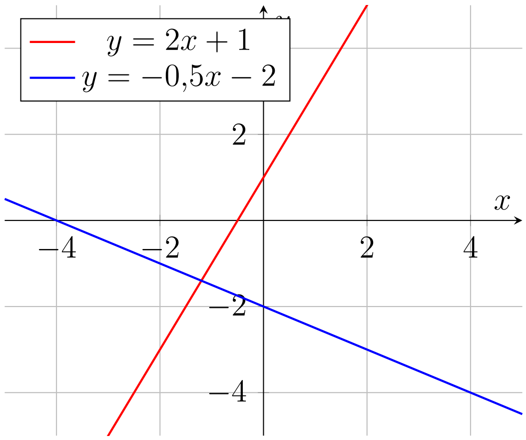
- Coordenada x del vértice: $x = -\frac{b}{2a}$
- Coordenada y del vértice: $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
- Eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a}$

Ejemplo 4.5. *Encuentre el vértice y el eje de simetría de $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.*
Solución:

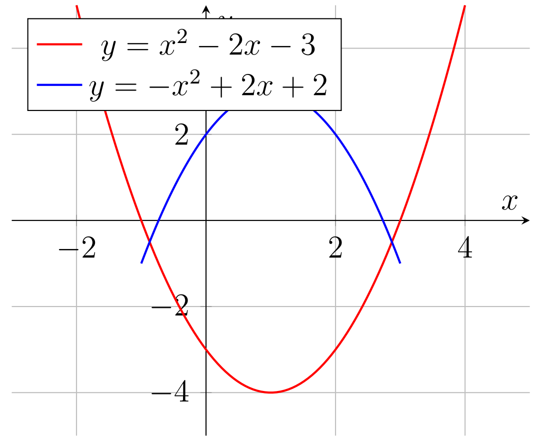
$$\begin{aligned} x &= -\frac{-8}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2 \\ y &= 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3 \\ \textit{Vértice} &= (2, -3) \\ \textit{Eje de simetría} &: x = 2 \end{aligned}$$

4.4. Gráficas de funciones lineales y cuadráticas

Funciones Lineales



Funciones Cuadráticas



4.5. Aplicaciones contextualizadas

4.5.1. Aplicaciones de funciones lineales

Ejemplo 4.6. *Una compañía tiene costos fijos de \$500 y costos variables de \$20 por unidad. Determine la función de costo y calcule el costo de producir 100 unidades.*
Solución:

$$C(x) = 20x + 500$$
$$C(100) = 20(100) + 500 = 2000 + 500 = 2500$$

El costo de producir 100 unidades es \$2500.

4.5.2. Aplicaciones de funciones cuadráticas

Ejemplo 4.7. *Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 m/s desde una altura de 5 m. La altura h (en metros) en función del tiempo t (en segundos) está dada por:*

$$h(t) = -5t^2 + 40t + 5$$

Encuentre la altura máxima y el tiempo en que la pelota toca el suelo.

Solución:

$$\begin{aligned}
\textit{Altura máxima: } t &= -\frac{40}{2(-5)} = 4 \textit{ segundos} \\
h(4) &= -5(16) + 40(4) + 5 = -80 + 160 + 5 = 85 \textit{ metros} \\
\textit{Toca el suelo cuando } h(t) &= 0: \\
-5t^2 + 40t + 5 &= 0 \\
t^2 - 8t - 1 &= 0 \\
t &= \frac{8 \pm \sqrt{64+4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{68}}{2} \approx \frac{8 \pm 8{,}25}{2} \\
t &\approx 8{,}125 \textit{ segundos (solo consideramos el valor positivo)}
\end{aligned}$$

4.6. Proyecto mini-aplicado

Diseñe un problema de la vida real que pueda modelarse con una función lineal o cuadrática. Incluya:

1. Descripción del problema
2. Función que lo modela
3. Análisis de la función (dominio, rango, vértice si es cuadrática)
4. Solución del problema usando la función
5. Interpretación de los resultados en el contexto del problema

Resumen En este módulo hemos estudiado las funciones lineales y cuadráticas, sus propiedades, gráficas y aplicaciones. Las funciones lineales modelan relaciones de proporcionalidad directa, mientras que las cuadráticas modelan fenómenos con puntos máximos o mínimos. Ambas tienen numerosas aplicaciones en situaciones reales.

Capítulo 5

Funciones Polinómicas y Racionales

5.1. Introducción

Las funciones polinómicas y racionales son extensiones naturales de las funciones lineales y cuadráticas. En este módulo estudiaremos sus propiedades, comportamiento y aplicaciones.

5.2. Funciones polinómicas

Definición 5.1. *Una función polinómica de grado n es una función de la forma:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo.

5.2.1. Características de los polinomios

- **Grado**: El exponente más alto de la variable
- **Coeficiente principal**: El coeficiente del término de mayor grado
- **Comportamiento en los extremos**: Determina cómo se comporta la función cuando $x \to \pm\infty$

Ejemplo 5.2. *Para $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$:*

- *Grado: 3 (cúbica)*
- *Coeficiente principal: 2*
- *Comportamiento: Cuando $x \to \infty$, $P(x) \to \infty$; cuando $x \to -\infty$, $P(x) \to -\infty$*

5.3. Raíces y multiplicidad

Definición 5.3. *Un número r es una raíz (o cero) de $P(x)$ si $P(r) = 0$. La multiplicidad de una raíz es el número de veces que aparece como factor.*

Ejemplo 5.4. *Para $P(x) = (x-2)^3(x+1)^2(x-5)$:*

- *Raíces: $x = 2$ (multiplicidad 3), $x = -1$ (multiplicidad 2), $x = 5$ (multiplicidad 1)*
- *Grado: $3 + 2 + 1 = 6$*

5.4. División sintética

La división sintética es un método abreviado para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $(x - c)$.

Ejemplo 5.5. *Divida $2x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ entre $(x - 2)$ usando división sintética.*
Solución:

$$\begin{array}{c|rrrr} 2 & 2 & -5 & 3 & -7 \\ & & 4 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -5 \end{array}$$

Resultado: $2x^2 - x + 1$ *con residuo* -5

5.5. Teorema del factor y del residuo

Teorema 5.6 (Teorema del residuo). *Si un polinomio $P(x)$ se divide entre $(x-c)$, entonces el residuo es $P(c)$.*

Teorema 5.7 (Teorema del factor). *$(x - c)$ es un factor de $P(x)$ si y solo si $P(c) = 0$.*

5.6. Funciones racionales

Definición 5.8. *Una función racional es el cociente de dos polinomios:*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $Q(x) \neq 0$.

5.6.1. Dominio de funciones racionales

El dominio de $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ son todos los números reales excepto aquellos que hacen $Q(x) = 0$.

Ejemplo 5.9. *Encuentre el dominio de* $R(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-6}$
Solución:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x-3)(x+2) &= 0 \\ x &= 3 \quad o \quad x = -2 \end{aligned}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$

5.7. Asíntotas y discontinuidades

5.7.1. Asíntotas verticales

Ocurren en los valores de x que hacen el denominador cero (pero no el numerero).

5.7.2. Asíntotas horizontales

Dependen de los grados de $P(x)$ y $Q(x)$:

- Si grado(P) $<$ grado(Q): Asíntota en $y = 0$
- Si grado(P) $=$ grado(Q): Asíntota en $y = \frac{a_n}{b_n}$
- Si grado(P) $>$ grado(Q): No hay asíntota horizontal (puede haber oblicua)

5.7.3. Discontinuidades removibles

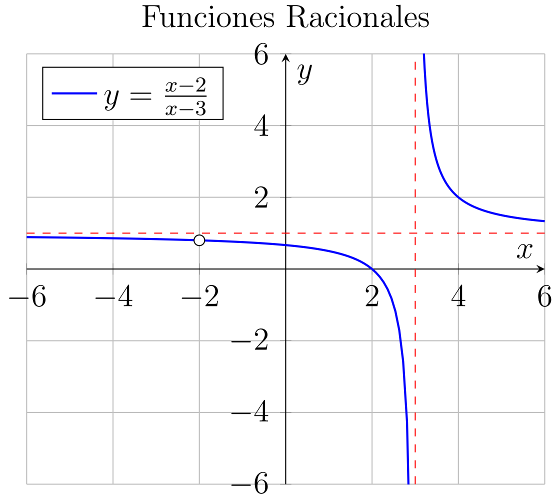
Ocurren cuando un factor se cancela en el numerador y denominador.

Ejemplo 5.10. *Analice la función* $R(x) = \frac{x^2-4}{x^2-x-6}$
Solución:

$$R(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-2}{x-3}, \quad x \neq -2$$

$$\begin{aligned} \textit{Asíntota vertical: } x &= 3 \\ \textit{Asíntota horizontal: } y &= 1 \\ \textit{Discontinuidad removible: } x &= -2 \end{aligned}$$

5.8. Gráficas de funciones racionales



5.9. Ejercicios de examen parcial

1. Encuentre todas las raíces de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
2. Use división sintética para dividir $3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ entre $(x + 2)$
3. Determine el dominio de $R(x) = \frac{x^2+3x-10}{x^2-9}$
4. Encuentre las asíntotas de $R(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-4}$
5. Grafique la función $R(x) = \frac{x-1}{x+2}$, indicando todas las asíntotas y discontinuidades

Resumen En este módulo hemos estudiado las funciones polinómicas y racionales. Las funciones polinómicas tienen comportamiento suave y continuo, mientras que las funciones racionales pueden tener asíntotas y discontinuidades. Hemos aprendido sobre raíces, multiplicidad, división sintética, teoremas del factor y residuo, así como el análisis de dominio, asíntotas y discontinuidades en funciones racionales.

Capítulo 6

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

6.1. Introducción

Las funciones exponenciales y logarítmicas son esenciales para modelar fenómenos de crecimiento y decaimiento, y tienen aplicaciones en diversas áreas como biología, economía, física y química.

6.2. Propiedades de potencias

Definición 6.1. *Para $a > 0$, $a \neq 1$, y x, y reales:*

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

6.3. Función exponencial

Definición 6.2. *Una función exponencial tiene la forma:*

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

6.3.1. Propiedades de las funciones exponenciales

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$

- Asíntota horizontal: $y = 0$
- $f(0) = 1$ para cualquier base a

6.3.2. Función exponencial natural

Cuando la base es $e \approx 2{,}71828$, tenemos la función exponencial natural:

$$f(x) = e^x$$

6.4. Función logarítmica

Definición 6.3. *La función logarítmica es la inversa de la función exponencial:*

$$y = \log_a x \quad \textit{si y solo si} \quad a^y = x$$

6.4.1. Propiedades de los logaritmos

Para $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$:

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$

6.4.2. Logaritmos comunes y naturales

- Logaritmo común: $\log x = \log_{10} x$
- Logaritmo natural: $\ln x = \log_e x$

6.5. Cambio de base

Teorema 6.4. *Para cambiar de base a a base b:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo 6.5. *Calcule* $\log_2 5$ *usando logaritmos naturales.*
Solución:

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx \frac{1{,}6094}{0{,}6931} \approx 2{,}3219$$

6.6. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

6.6.1. Ecuaciones exponenciales

Para resolver ecuaciones donde la variable está en el exponente:

1. Aislar la expresión exponencial
2. Aplicar logaritmos a ambos lados
3. Resolver para la variable

Ejemplo 6.6. *Resuelva:* $3^{2x-1} = 5$
Solución:

$$\begin{aligned}
3^{2x-1} &= 5 \\
\ln(3^{2x-1}) &= \ln 5 \\
(2x-1)\ln 3 &= \ln 5 \\
2x-1 &= \frac{\ln 5}{\ln 3} \\
2x &= \frac{\ln 5}{\ln 3} + 1 \\
x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 5}{\ln 3} + 1\right) \approx \frac{1}{2}(1{,}465 + 1) = 1{,}2325
\end{aligned}$$

6.6.2. Ecuaciones logarítmicas

Para resolver ecuaciones con logaritmos:

1. Combinar logaritmos usando propiedades
2. Reescribir en forma exponencial
3. Resolver para la variable
4. Verificar que las soluciones estén en el dominio

Ejemplo 6.7. *Resuelva:* $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = 3$
Solución:

$$\begin{aligned}
\log_2[(x+3)(x-1)] &= 3 \\
(x+3)(x-1) &= 2^3 = 8 \\
x^2 + 2x - 3 &= 8 \\
x^2 + 2x - 11 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+44}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

Solo $x = -1 + 2\sqrt{3} \approx 2{,}464$ *está en el dominio* ($x > 1$).

6.7. Aplicaciones reales

6.7.1. Crecimiento exponencial

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

donde P_0 es la cantidad inicial, $k > 0$ es la tasa de crecimiento.

6.7.2. Decaimiento exponencial

$$P(t) = P_0 e^{-kt}$$

donde P_0 es la cantidad inicial, $k > 0$ es la tasa de decaimiento.

6.7.3. Interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde:

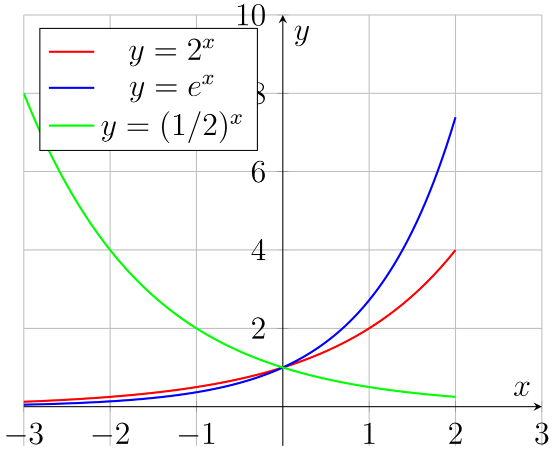
- A: cantidad final
- P: principal (inversión inicial)
- r: tasa de interés anual
- n: número de periodos de capitalización por año
- t: tiempo en años

Ejemplo 6.8. *¿Cuánto tiempo tomará para que una inversión de \$1000 se duplique a una tasa de interés del 5 % compuesto anualmente?*
Solución:

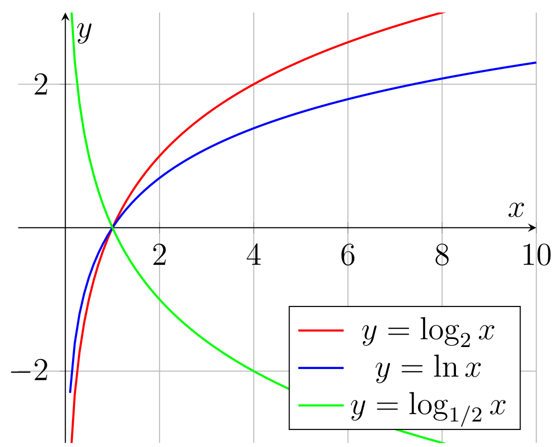
$$\begin{aligned}
2000 &= 1000(1 + 0{,}05)^t \\
2 &= (1{,}05)^t \\
\ln 2 &= t \ln 1{,}05 \\
t &= \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx \frac{0{,}6931}{0{,}0488} \approx 14{,}2 \text{ \textit{años}}
\end{aligned}$$

6.8. Gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones Exponenciales



Funciones Logarítmicas



6.9. Ejercicios de evaluación

1. Resuelva: $4^{x+1} = 8^{x-1}$

2. Resuelva: $\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 1$

3. Si \$5000 se invierten al 6 % de interés compuesto trimestralmente, ¿cuál será el valor después de 10 años?

4. Una sustancia radioactiva se desintegra según el modelo $A(t) = A_0 e^{-0{,}05t}$. Si inicialmente hay 100g, ¿cuánto tiempo tomará para que se reduzca a 25g?

5. Grafique $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ en el mismo sistema de coordenadas y muestre que son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Resumen En este módulo hemos estudiado las funciones exponenciales y logarítmicas, sus propiedades, gráficas y aplicaciones. Estas funciones son inversas una de la otra y son esenciales para modelar fenómenos de crecimiento y decaimiento. Hemos aprendido a resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, y aplicado estos conceptos a problemas del mundo real como interés compuesto y desintegración radioactiva.

Capítulo 7

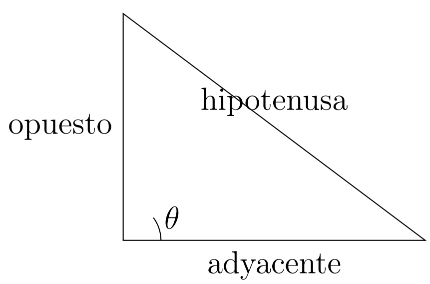
Funciones Trigonométricas

7.1. Introducción

Las funciones trigonométricas son fundamentales para estudiar fenómenos periódicos y tienen aplicaciones en física, ingeniería, astronomía y muchas otras áreas. En este módulo exploraremos las funciones trigonométricas básicas y sus propiedades.

7.2. Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

En un triángulo rectángulo, para un ángulo agudo θ:

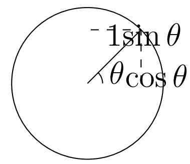


Definición 7.1.

$$\sin\theta = \frac{\textit{opuesto}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\cos\theta = \frac{\textit{adyacente}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\tan\theta = \frac{\textit{opuesto}}{\textit{adyacente}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

7.3. Círculo unitario

El círculo unitario es un círculo con radio 1 centrado en el origen. Las coordenadas de cualquier punto en el círculo unitario son $(\cos\theta, \sin\theta)$.



7.4. Funciones trigonométricas

7.4.1. Función seno

$$f(x) = \sin x$$

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $[-1, 1]$
- Período: 2π

7.4.2. Función coseno

$$f(x) = \cos x$$

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $[-1, 1]$
- Período: 2π

7.4.3. Función tangente

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- Dominio: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Rango: $(-\infty, \infty)$
- Período: π

7.5. Identidades trigonométricas básicas

7.5.1. Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

7.5.2. Identidades de cofunción

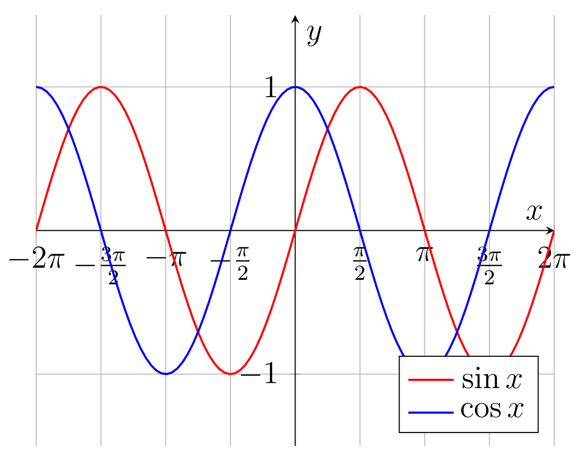
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

7.5.3. Identidades par-impar

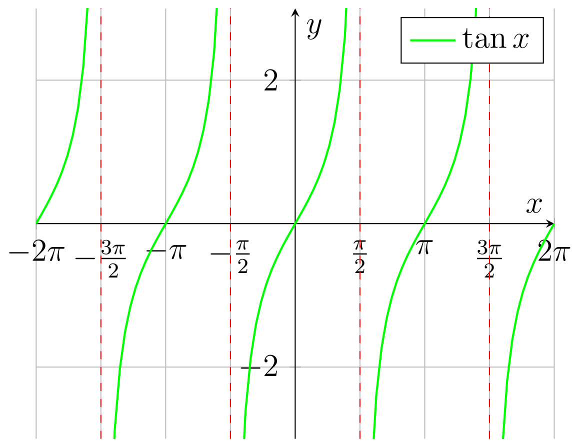
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad \text{(impar)}$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{(par)}$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \text{(impar)}$$

7.6. Gráficas de funciones trigonométricas

Funciones Seno y Coseno



Función Tangente



7.7. Transformaciones de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas pueden transformarse como cualquier otra función:

- **Amplitud**: $y = A \sin x$ o $y = A \cos x$ (|A| es la amplitud)
- **Período**: $y = \sin(Bx)$ o $y = \cos(Bx)$ (período $= \frac{2\pi}{|B|}$)
- **Desplazamiento vertical**: $y = \sin x + D$ o $y = \cos x + D$
- **Desplazamiento horizontal**: $y = \sin(x - C)$ o $y = \cos(x - C)$

Ejemplo 7.2. *Grafique* $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$
Solución:

- *Amplitud: 2*
- *Período:* $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$
- *Desplazamiento horizontal:* $\frac{\pi/4}{1/2} = \frac{\pi}{2}$ *a la derecha*
- *Desplazamiento vertical: 1 unidad hacia arriba*

7.8. Aplicaciones prácticas

7.8.1. Movimiento armónico simple

El movimiento de un resorte o péndulo puede modelarse con funciones trigonométricas:

$$y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

donde:

- A: amplitud
- ω: frecuencia angular
- ϕ: ángulo de fase

7.8.2. Ondas y sonido

Las ondas sonoras pueden representarse como funciones seno o coseno:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

7.8.3. Problemas de navegación y topografía

Las funciones trigonométricas se usan para calcular distancias y ángulos inaccesibles.

Ejemplo 7.3. *Desde un punto en el suelo, el ángulo de elevación a la parte superior de un edificio es 30°. Si la distancia al edificio es 50m, ¿cuál es la altura del edificio?*
Solución:

$$\tan 30 = \frac{altura}{50}$$

$$altura = 50 \cdot \tan 30 = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 28{,}87m$$

7.9. Taller de funciones trigonométricas

1. Encuentre los valores exactos de:
   a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
   c) $\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
2. Verifique la identidad: $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$
3. Grafique $y = 3\cos(2x - \pi) - 1$, indicando amplitud, período y desplazamientos
4. Resuelva el triángulo rectángulo con hipotenusa 10 y un ángulo agudo de 30°
5. Una rueda de ferris tiene un radio de 15m y tarda 2 minutos en completar una vuelta. Modele la altura de un pasajero sobre el suelo en función del tiempo.

Resumen En este módulo hemos estudiado las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), sus propiedades, gráficas y aplicaciones. Hemos visto cómo se definen estas funciones tanto en triángulos rectángulos como en el círculo unitario, y hemos explorado identidades trigonométricas fundamentales. Las funciones trigonométricas son esenciales para modelar fenómenos periódicos y tienen numerosas aplicaciones en la ciencia y la ingeniería.

Capítulo 8

Introducción al Límite y la Continuidad

8.1. Introducción

El concepto de límite es fundamental en el cálculo y constituye la base sobre la cual se construyen la derivada y la integral. En este módulo exploraremos la noción intuitiva de límite y su relación con la continuidad de funciones.

8.2. Concepto intuitivo de límite

Definición 8.1. *El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es el valor L al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca arbitrariamente a a, pero sin llegar a ser a. Se denota por:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplo 8.2. *Estime el valor de* $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
Solución: *Aunque la función no está definida en $x = 2$, podemos simplificar:*

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2, \quad \textit{para } x \neq 2$$

Cuando x se acerca a 2, $x+2$ se acerca a 4. Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

8.3. Límites laterales

Definición 8.3.

- ***Límite por la derecha****:* $\lim_{x \to a^+} f(x)$ *es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a a por valores mayores que a.*
- ***Límite por la izquierda****:* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se acerca a a por valores menores que a.*

El límite existe si y solo si ambos límites laterales existen y son iguales.

Ejemplo 8.4. *Para la función definida por partes:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ x^2 - 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Determine $\lim_{x\to 2} f(x)$
Solución:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-1) = 4-1 = 3$$

Como ambos límites laterales son iguales, $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

8.4. Propiedades de los límites

Teorema 8.5. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = M$*, entonces:*

1. $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = L - M$
3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = cL$ *para cualquier constante c*
4. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$*, siempre que* $M \neq 0$
6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$ *para cualquier entero positivo n*

8.5. Límites infinitos y asíntotas verticales

Definición 8.6. *Si* $f(x)$ *crece o decrece sin límite cuando* x *se acerca a* a*, decimos que:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad o \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

En estos casos, la recta $x = a$ *es una asíntota vertical de la gráfica de* f*.*

Ejemplo 8.7. *Analice* $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$
Solución: *Cuando* x *se acerca a 3,* $(x-3)^2$ *se acerca a 0 por valores positivos, por lo que* $\frac{1}{(x-3)^2}$ *se hace muy grande. Así:*

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$$

La recta $x = 3$ *es una asíntota vertical.*

8.6. Límites al infinito y asíntotas horizontales

Definición 8.8. *Si $f(x)$ se aproxima a un valor L cuando x crece o decrece sin límite, decimos que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

En estos casos, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Ejemplo 8.9. *Encuentre* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{5x^2-x+4}$
Solución: *Dividimos numerador y denominador por x^2:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{5x^2-x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{5-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{2+0-0}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

La recta $y = \frac{2}{5}$ es una asíntota horizontal.

8.7. Continuidad de funciones

Definición 8.10. *Una función f es continua en $x = a$ si:*

1. *$f(a)$ está definida*
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe*
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Si alguna de estas condiciones no se cumple, decimos que f es discontinua en $x = a$.

Ejemplo 8.11. *Determine si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ es continua en $x = 1$.*
Solución:

1. *$f(1)$ no está definida (división por cero)*
2. $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$ *(existe)*

Como $f(1)$ no está definida, la función es discontinua en $x = 1$. Esta discontinuidad es removible porque podemos redefinir $f(1) = 2$ para hacerla continua.

8.8. Tipos de discontinuidades

- **Discontinuidad removible**: Ocurre cuando el límite existe pero $f(a)$ no está definida o $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$.
- **Discontinuidad de salto**: Ocurre cuando los límites laterales existen pero son diferentes.
- **Discontinuidad infinita**: Ocurre cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

8.9. Teorema del valor intermedio

Teorema 8.12 (Teorema del valor intermedio)**.** *Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en (a,b) tal que $f(c)=k$.*

Ejemplo 8.13. *Use el teorema del valor intermedio para mostrar que la ecuación $x^3+2x-5=0$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.*
Solución: *Sea $f(x)=x^3+2x-5$. Esta función es continua en $[1,2]$ porque es un polinomio.*

$$f(1) = 1+2-5 = -2$$
$$f(2) = 8+4-5 = 7$$

Como 0 está entre -2 y 7, por el teorema del valor intermedio, existe c en $(1,2)$ tal que $f(c)=0$.

8.10. Ejercicios de preparación para el cálculo

1. Evalúe los siguientes límites:
   a) $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+1)$
   b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
   c) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+1}{4x^3+5x^2-2}$
2. Determine si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados. Si no lo son, clasifique la discontinuidad.
   a) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ en $x=3$
   b) $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<2 \\ 5 & \text{si } x=2 \\ 2x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en $x=2$
3. Use el teorema del valor intermedio para mostrar que la ecuación $e^x+x=3$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0,2)$.
4. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de $f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-4}$.
5. Trace la gráfica de una función que tenga:
   - Una discontinuidad de salto en $x=-1$
   - Una discontinuidad removible en $x=2$
   - Una asíntota vertical en $x=0$
   - Una asíntota horizontal en $y=1$

Resumen En este módulo hemos introducido el concepto fundamental de límite, que es la base del cálculo. Hemos estudiado cómo evaluar límites algebraicamente y gráficamente, explorado los diferentes tipos de discontinuidades y comprendido el importante teorema del valor intermedio. Estos conceptos preparan el terreno para el estudio del cálculo diferencial e integral, donde los límites se utilizan para definir derivadas e integrales.

Quiz Final de Pre-Cálculo

Instrucciones

- Este quiz consta de 20 preguntas que cubren todos los temas del curso.
- Dispone de 90 minutos para completarlo.
- Marque sus respuestas en la hoja de respuestas proporcionada.
- Cada pregunta vale 5 puntos, para un total de 100 puntos.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas o dispositivos electrónicos.
- Puede usar una calculadora científica básica.

1. ¿Cuál de los siguientes números es irracional?

   a) $\sqrt{16}$
   b) $\frac{3}{4}$
   c) 0,75
   d) $\sqrt{2}$

2. Al simplificar la expresión $3(2x - 5y) + 2(4x + y)$, se obtiene:

   a) $14x - 13y$
   b) $6x - 15y + 8x + 2y$
   c) $14x + 17y$
   d) $6x - 10y + 8x + 2y$

3. La solución de la ecuación $|2x - 3| = 7$ es:

   a) $x = 5$
   b) $x = -2$
   c) $x = 5$ y $x = -2$

d) $x = 2$

4. El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ es:
   a) $(-\infty, \infty)$
   b) $[2, \infty)$
   c) $(2, \infty)$
   d) $(-\infty, 2]$
5. Si $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = x - 1$, entonces $(f \circ g)(x)$ es igual a:
   a) $x^2 + 2x - 4$
   b) $x^2 - 4$
   c) $x^2 + 4x - 4$
   d) $x^2 - 2$
6. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(4, 7)$ es:
   a) $y = 2x - 1$
   b) $y = 2x + 1$
   c) $y = \frac{1}{2}x + 2$
   d) $y = 4x - 5$
7. El vértice de la parábola $y = 2x^2 - 8x + 5$ es:
   a) $(2, -3)$
   b) $(-2, 3)$
   c) $(4, 5)$
   d) $(8, 5)$
8. Las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ son:
   a) $x = -1, 2, 3$
   b) $x = 1, -2, -3$
   c) $x = -1, -2, 3$
   d) $x = 1, 2, 3$
9. El dominio de la función racional $R(x) = \frac{x^2+3x-10}{x^2-9}$ es:
   a) Todos los números reales excepto $x = 3$
   b) Todos los números reales excepto $x = -3, 3$
   c) Todos los números reales excepto $x = -5, 2$
   d) Todos los números reales excepto $x = -3, 3, -5, 2$

10. La solución de la ecuación $4^{x+1} = 8^{x-1}$ es:

    a) $x = 5$
    b) $x = 3$
    c) $x = \frac{7}{2}$
    d) $x = \frac{5}{2}$

11. Si \$5000 se invierten al 6 % de interés compuesto trimestralmente, el valor después de 10 años está dado por:

    a) $A = 5000(1 + 0{,}06)^{10}$
    b) $A = 5000(1 + 0{,}015)^{40}$
    c) $A = 5000(1 + 0{,}06)^{40}$
    d) $A = 5000(1 + 0{,}015)^{10}$

12. La solución de la ecuación $\log_3(x + 1) + \log_3(x - 1) = 1$ es:

    a) $x = 2$
    b) $x = -2$
    c) $x = 2$ y $x = -2$
    d) $x = \sqrt{2}$

13. El valor exacto de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ es:

    a) $\frac{1}{2}$
    b) $-\frac{1}{2}$
    c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. Si $\sin\theta = \frac{3}{5}$ y θ está en el segundo cuadrante, entonces $\tan\theta$ es igual a:

    a) $\frac{3}{4}$
    b) $-\frac{3}{4}$
    c) $\frac{4}{3}$
    d) $-\frac{4}{3}$

15. La identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ es válida para:

    a) Algunos valores de x
    b) Todos los valores de x
    c) Solo valores de x en el primer cuadrante
    d) Solo valores de x entre 0 y 2π

16. El valor de $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ es:

    a) 0
    b) 6
    c) No existe
    d) ∞

17. La función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es:

    a) Continua en $x = 2$
    b) Discontinua removible en $x = 2$
    c) Discontinua de salto en $x = 2$
    d) Discontinua infinita en $x = 2$

18. La asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ es:

    a) $x = -3$
    b) $x = 3$
    c) $x = -\frac{1}{2}$
    d) $y = 2$

19. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)]$ es igual a:

    a) $L + M$
    b) $L - M$
    c) $L \cdot M$
    d) $\frac{L}{M}$

20. Según el teorema del valor intermedio, si f es continua en $[a, b]$ y k está entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces:

    a) $f(a) = f(b)$
    b) Existe c en (a, b) tal que $f(c) = k$
    c) f es derivable en (a, b)
    d) f tiene un máximo en $[a, b]$

Hoja de respuestas

Nombre: ____________________

Fecha: ____________________

Pregunta	A	B	C	D
1	☐	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☐
3	☐	☐	☐	☐
4	☐	☐	☐	☐
5	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐
7	☐	☐	☐	☐
8	☐	☐	☐	☐
9	☐	☐	☐	☐
10	☐	☐	☐	☐
11	☐	☐	☐	☐
12	☐	☐	☐	☐
13	☐	☐	☐	☐
14	☐	☐	☐	☐
15	☐	☐	☐	☐
16	☐	☐	☐	☐
17	☐	☐	☐	☐
18	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐
20	☐	☐	☐	☐

Clave de respuestas

1. D ($\sqrt{2}$)
2. A ($14x - 13y$)
3. C ($x = 5$ y $x = -2$)
4. B ($[2, \infty)$)
5. B ($x^2 - 4$)
6. A ($y = 2x - 1$)
7. A ($(2, -3)$)
8. A ($x = -1, 2, 3$)
9. B (Todos los números reales excepto $x = -3, 3$)
10. A ($x = 5$)
11. B ($A = 5000(1 + 0{,}015)^{40}$)
12. A ($x = 2$)
13. D ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$)
14. B ($-\frac{3}{4}$)
15. B (Todos los valores de x)
16. B (6)
17. B (Discontinua removible en $x = 2$)
18. B ($x = 3$)
19. C ($L \cdot M$)
20. B (Existe c en (a, b) tal que $f(c) = k$)

Ejercicios Finales de Preparación para el Cálculo

Instrucciones

- Estos ejercicios cubren todos los temas del curso de Pre-Cálculo.
- Se recomienda resolverlos como preparación para el examen final.
- Los problemas están organizados por temas.
- Las soluciones detalladas están disponibles en el apéndice.

8.11. Álgebra y funciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $3(2x-5)+4x=2(3x+1)-7$
   b) $|2x-3|=9$
   c) $x^2-5x+6=0$
   d) $\sqrt{x+3}=x-3$

2. Simplifique las expresiones:

   a) $\frac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$
   b) $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}-\frac{5}{x^2+x-6}$
   c) $(2x^3y^{-2})^3(3x^{-1}y^4)^{-2}$

3. Para las funciones $f(x)=x^2-4$ y $g(x)=\sqrt{x+1}$, determine:

   a) $(f+g)(x)$
   b) $(f\circ g)(x)$
   c) $(g\circ f)(x)$
   d) El dominio de $(f\circ g)(x)$

8.12. Funciones polinómicas y racionales

4. Encuentre las raíces reales de los siguientes polinomios:
   a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
   b) $Q(x) = 2x^4 - 11x^3 + 12x^2 + x - 2$
5. Para la función racional $R(x) = \frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$, determine:
   a) El dominio
   b) Las asíntotas verticales y horizontales
   c) Las intersecciones con los ejes
   d) El comportamiento en los intervalos determinados por los puntos críticos
6. Resuelva las desigualdades:
   a) $\frac{x-2}{x+3} \geq 0$
   b) $x^3 - 4x^2 + x + 6 < 0$

8.13. Funciones exponenciales y logarítmicas

7. Resuelva las ecuaciones exponenciales:
   a) $2^{x+1} = 8^{x-2}$
   b) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
8. Resuelva las ecuaciones logarítmicas:
   a) $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = 3$
   b) $\ln(x+2) - \ln(x-1) = 1$
9. Aplicaciones:
   a) Si se invierten \$5000 a una tasa de interés del 4 % compuesto continuamente, ¿cuál será el saldo después de 8 años?
   b) La población de una ciudad crece exponencialmente. Si en 2010 era de 50,000 habitantes y en 2020 era de 65,000, ¿cuál será la población en 2030?

8.14. Trigonometría

10. Evalúe las siguientes expresiones sin usar calculadora:
    a) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
    b) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right)$
d) $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

11. Verifique las siguientes identidades:

    a) $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x} = 2\csc x$
    b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

12. Resuelva las ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$:

    a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
    b) $\cos(2x) = \sin x$
    c) $\tan x = \sec x - 1$

13. Problemas de aplicación:

    a) Desde un punto en el suelo a 50 metros de la base de un edificio, el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 60°. ¿Cuál es la altura del edificio?
    b) Un avión vuela a una altitud de 5 km. Si el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 30°, ¿a qué distancia horizontal se encuentra el barco del avión?

8.15. Límites y continuidad

14. Evalúe los siguientes límites:

    a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
    b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$
    c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3-2x+1}{4x^3+5x^2-2}$
    d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$

15. Determine si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados. Si no lo son, clasifique la discontinuidad.

    a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$
    b) $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ en $x = 3$

16. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales de:

    a) $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-4}$
    b) $g(x) = \frac{x^3-1}{x^2+2x}$

17. Use el teorema del valor intermedio para mostrar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución en el intervalo dado:

    a) $x^3 + 2x - 5 = 0$ en $(1, 2)$

    b) $e^x + x = 4$ en $(1, 2)$

8.16. Problemas de síntesis

18. Una caja rectangular sin tapa se construye a partir de una pieza de cartón de 20 cm por 30 cm, cortando cuadrados de lado x en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Exprese el volumen de la caja como función de x y determine el dominio de esta función.

19. Se necesita construir un cercado rectangular con 400 metros de malla. Un lado del rectángulo está a lo largo de un río, por lo que no necesita cercado. Exprese el área del cercado como función de la longitud del lado paralelo al río y determine las dimensiones que maximizan el área.

20. La concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo t horas después de su administración está dada por $C(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ mg/L. Determine:

    a) La concentración máxima y el momento en que ocurre

    b) $\lim_{t\to\infty} C(t)$ e interprete el resultado

21. Un puente colgante tiene cables que forman una parábola. Los pilares del puente están a 200 metros de distancia y tienen 50 metros de altura. Si el punto más bajo del cable está a 10 metros sobre la calzada, encuentre la ecuación de la parábola que describe el cable.

Soluciones seleccionadas

Ejercicio 1a:

$$\begin{aligned}
3(2x-5) + 4x &= 2(3x+1) - 7 \\
6x - 15 + 4x &= 6x + 2 - 7 \\
10x - 15 &= 6x - 5 \\
10x - 6x &= -5 + 15 \\
4x &= 10 \\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4a: Para encontrar las raíces de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, buscamos los factores del término constante (12): $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Probamos $x = 2$: $P(2) = 8 - 12 - 8 + 12 = 0$, por lo que $x = 2$ es una raíz.

Dividimos $P(x)$ entre $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Obtenemos $x^2 - x - 6 = 0$, cuyas soluciones son $x = 3$ y $x = -2$.

Por lo tanto, las raíces son $x = -2, 2, 3$.

Ejercicio 7a:

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &= 8^{x-2} \\ 2^{x+1} &= (2^3)^{x-2} \\ 2^{x+1} &= 2^{3(x-2)} \\ x+1 &= 3(x-2) \\ x+1 &= 3x-6 \\ 1+6 &= 3x-x \\ 7 &= 2x \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 16a:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}(x+2) \\ &= 2+2 = 4 \end{aligned}$$

Consejos para el examen final

- Revise todos los conceptos principales: funciones, álgebra, trigonometría y límites.
- Practique la resolución de problemas con tiempo limitado.
- Descanse bien la noche anterior al examen.
- Lea cuidadosamente cada pregunta antes de responder.
- Administre su tiempo durante el examen.
- Verifique sus respuestas si le sobra tiempo.

¡Éxito en su examen final!