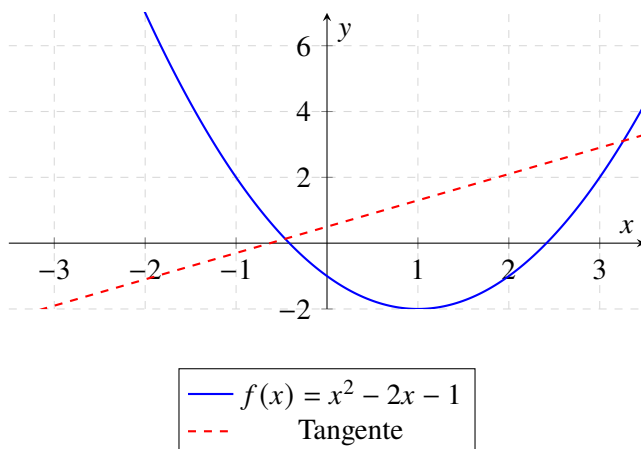


Apuntes de apoyo para el estudiante



© 2025 Centro Psicopedagógico La Paz

Todos los derechos reservados.

Este material está destinado exclusivamente para uso educativo.
Prohibida su reproducción total o parcial sin autorización escrita del
autor.

Índice general

Resumen	IV
Introducción	v
1 Funciones y Representaciones	1
1.1 Introducción a funciones	1
1.2 Dominio y rango	1
1.3 Tipos de funciones	2
1.3.1 Funciones lineales	2
1.3.2 Funciones cuadráticas	2
1.3.3 Funciones por tramos	2
1.4 Composición de funciones	3
2 Límites y Continuidad	5
2.1 Concepto de límite	5
2.2 Aproximación gráfica y numérica	5
2.3 Continuidad y tipos de discontinuidad	6
2.3.1 Tipos de discontinuidad	6
3 Propiedades y Cálculo de Límites	10
3.1 Reglas algebraicas de límites	10
3.2 Límites notables	10
3.3 Límites al infinito y asíntotas	12
3.3.1 Límites al infinito	12
3.3.2 Asíntotas	12
4 La Derivada y su Interpretación	14

4.1	Definición de derivada como límite	14
4.2	Pendiente de la recta tangente	14
4.3	Derivada como tasa de cambio	15
4.4	Derivabilidad y continuidad	16
5	Reglas de Derivación	19
5.1	Reglas básicas de derivación	19
5.2	Regla del producto	19
5.3	Regla del cociente	20
5.4	Regla de la cadena	20
5.5	Derivadas de funciones elementales	20
5.6	Derivadas de orden superior	21
6	Aplicaciones de la Derivada	24
6.1	Crecimiento y decrecimiento	24
6.2	Valores críticos y extremos	24
6.3	Criterio de la primera derivada	25
6.4	Criterio de la segunda derivada	25
6.5	Concavidad y puntos de inflexión	25
6.6	Problemas de optimización	26
7	Razones de Cambio y Rectas Tangentes	29
7.1	Razones de cambio relacionadas	29
7.2	Rectas tangentes y normales	30
7.3	Aplicaciones en física	31
8	Integral Definida como Área	35
8.1	Antiderivadas	35
8.2	Sumas de Riemann e integral definida	35
8.3	Interpretación como área	36
8.4	Teorema Fundamental del Cálculo	37
8.5	Área entre curvas	37

9	Hoja de Ejercicios Finales	40
10	Quiz Final	44

Resumen

Estos *Apuntes de apoyo* de **Cálculo Diferencial** acompañan al estudiante en la transición de Bachillerato General hacia el nivel universitario. El material está organizado en ocho módulos y un quiz final. Cada módulo combina objetivos claros, teoría esencial, ejemplos visuales contruidos con gráficas limpias, ejercicios graduados y soluciones paso a paso.

Los contenidos se articulan de la siguiente manera: (i) repaso de funciones y modelos; (ii) álgebra de funciones y transformaciones; (iii) límites desde un enfoque numérico y gráfico; (iv) continuidad y tipos de discontinuidad; (v) definición y reglas de derivación; (vi) interpretación geométrica y física de la derivada; (vii) optimización y problemas de razón de cambio; (viii) esbozo de curvas y aplicaciones integradas.

El énfasis pedagógico está en comprender *qué* significan las fórmulas y *cómo* se usan para resolver problemas reales. Las figuras fueron diseñadas para ser legibles en formato e-book (6×9”), con colores distinguibles, leyendas no intrusivas y ejes etiquetados. El objetivo final es que el estudiante desarrolle autonomía, confianza y una base sólida para cursos posteriores de cálculo integral, multivariable y física.

Introducción

El **Cálculo Diferencial** estudia el cambio. Describe cómo varían cantidades y cómo esa variación se modela con funciones. A partir de la noción de *límite* se definen ideas fundamentales como *derivada* y *continuidad*, que permiten analizar movimientos, crecimientos, costos marginales y fenómenos naturales.

En estos apuntes se integran tres pilares: (1) representación múltiple de funciones (expresión, tabla, gráfica y contexto), (2) razonamiento con límites y continuidad, y (3) derivada como tasa de cambio y pendiente de la tangente. La metodología avanza de lo intuitivo a lo formal, alternando teoría breve con ejemplos resueltos y ejercicios.

Se recomienda estudiar cada módulo en este orden: leer objetivos, revisar la teoría, analizar los ejemplos, intentar los ejercicios sin mirar las soluciones y, por último, comparar procedimientos. El quiz final permite autoevaluar el dominio de resultados básicos y la capacidad de interpretación gráfica.

Capítulo 1

Funciones y Representaciones

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Comprender el concepto de función y sus diferentes representaciones
- Determinar el dominio y rango de funciones algebraicas
- Identificar y graficar funciones lineales, cuadráticas y por tramos
- Realizar composiciones de funciones y encontrar sus dominios

1.1. Introducción a funciones

Definición 1.1. Una *función* f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento x en A exactamente un elemento y en B . Se denota por $f : A \rightarrow B$ donde A es el **dominio** y B es el **codominio**.

La notación funcional $y = f(x)$ indica que y es el valor de la función f en x . El conjunto de todos los valores posibles de y se llama **rango** o **imagen** de la función.

1.2. Dominio y rango

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de entrada para los cuales la función está definida. Para determinar el dominio, consideramos:

- Denominadores distintos de cero
- Radicandos de raíces pares no negativos
- Argumentos de logaritmos positivos

El **rango** es el conjunto de todos los valores de salida que resultan de evaluar la función en su dominio.

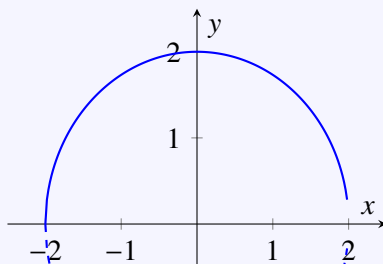
Ejemplo resuelto

Ejemplo: Encontrar el dominio y rango de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Solución: Para que la raíz cuadrada esté definida, necesitamos:

$$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Por lo tanto, el dominio es $[-2, 2]$. El rango son todos los valores desde $f(-2) = 0$ hasta $f(0) = 2$, es decir, $[0, 2]$.



1.3. Tipos de funciones

1.3.1. Funciones lineales

Las funciones lineales tienen la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la intersección con el eje y . Su gráfica es una línea recta.

1.3.2. Funciones cuadráticas

Las funciones cuadráticas tienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

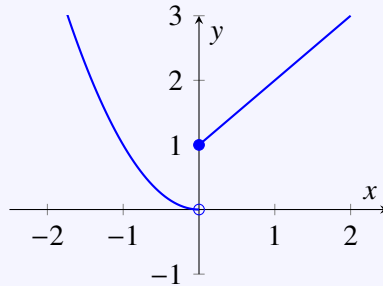
1.3.3. Funciones por tramos

Las funciones definidas por tramos usan diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución: Para $x < 0$, usamos la parábola $y = x^2$. Para $x \geq 0$, usamos la recta $y = x + 1$.



1.4. Composición de funciones

La **composición** de dos funciones f y g se denota por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. El dominio de $f \circ g$ consiste en todos los x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f .

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 4$, encontrar $f \circ g$ y su dominio.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$$

El dominio requiere que $x^2 - 4 \geq 0$, es decir, $x \leq -2$ o $x \geq 2$.

Ejercicios propuestos

- Determine el dominio y rango de las siguientes funciones:
 - $f(x) = \frac{1}{x-3}$
 - $g(x) = \sqrt{9-x^2}$
 - $h(x) = |x-2| + 1$
- Grafique las siguientes funciones:
 - $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 - $g(x) = |x+2| - 3$
- Dadas $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, encuentre:
 - $(f \circ g)(x)$ y su dominio
 - $(g \circ f)(x)$ y su dominio
- Un fabricante descubre que el costo C (en dólares) de producir x unidades está dado por $C(x) = 100 + 5x + 0.01x^2$. Si cada unidad se vende a \$10, encuentre la función de utilidad $U(x)$ que represente la utilidad al vender x unidades.

Soluciones

Soluciones:

- (a) Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$, Rango: $\mathbb{R} - \{0\}$
(b) Dominio: $[-3, 3]$, Rango: $[0, 3]$
(c) Dominio: $\mathbb{R}$, Rango: $[1, \infty)$
- (a) Gráfica con recta para $x \leq 1$ y parábola para $x > 1$
(b) Gráfica en V con vértice en $(-2, -3)$
- (a) $(f \circ g)(x) = x + 1$, Dominio: $[0, \infty)$
(b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, Dominio: $\mathbb{R}$
- $U(x) = 10x - (100 + 5x + 0.01x^2) = 5x - 100 - 0.01x^2$

Capítulo 2

Límites y Continuidad

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Comprender el concepto intuitivo y formal de límite
- Calcular límites mediante aproximación numérica y gráfica
- Identificar y clasificar discontinuidades en funciones
- Aplicar el concepto de continuidad en problemas prácticos

2.1. Concepto de límite

Definición 2.1. El *límite* de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a a es L , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ se aproximan arbitrariamente a L cuando x se aproxima suficientemente a a (pero $x \neq a$).

2.2. Aproximación gráfica y numérica

Podemos aproximarnos al valor de un límite de dos formas:

1. **Numéricamente:** Creando una tabla de valores de $f(x)$ para x cercanos a a
2. **Gráficamente:** Observando el comportamiento de la gráfica cerca de $x = a$

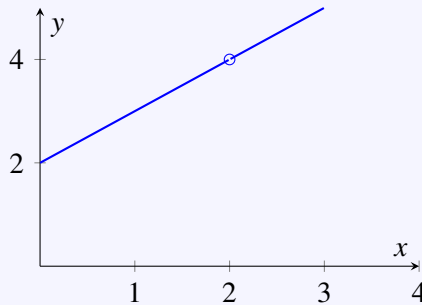
Ejemplo resuelto

Ejemplo: Estimar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solución numérica:

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1

Solución gráfica:



El límite parece ser 4, aunque la función no está definida en $x = 2$.

2.3. Continuidad y tipos de discontinuidad

Definición 2.2. Una función f es *continua* en $x = a$ si:

1. $f(a)$ está definida
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2.3.1. Tipos de discontinuidad

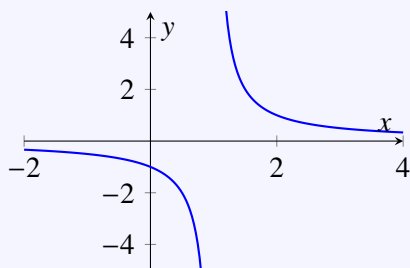
1. **Discontinuidad evitable (removable):** Ocurre cuando el límite existe pero no es igual al valor de la función (o la función no está definida en ese punto).
2. **Discontinuidad de salto:** Ocurre cuando los límites laterales existen pero son diferentes.
3. **Discontinuidad infinita:** Ocurre cuando al menos uno de los límites laterales es infinito.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Clasificar las discontinuidades de $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Solución: La función tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$ porque:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$



Ejercicios propuestos

- Use una tabla de valores para estimar los siguientes límites:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
- Grafique las siguientes funciones y determine los puntos de discontinuidad, clasificándolos:
 - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
 - $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
 - $h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$
- Determine si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados:
 - $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x = 2$
 - $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = 0$
- Un tanque de agua tiene una fuga. La cantidad de agua en el tanque (en litros) después de t minutos está dada por:

$$W(t) = \begin{cases} 1000 - 5t & \text{si } 0 \leq t < 10 \\ 900 & \text{si } 10 \leq t < 20 \\ 900 - 10(t - 20) & \text{si } t \geq 20 \end{cases}$$

¿Es continua esta función en $t = 10$ y $t = 20$? Explique.

Soluciones

Soluciones:

1. (a) El límite es 1 (b) El límite es 6
2. (a) Discontinuidad evitable en $x = 1$
(b) Discontinuidad de salto en $x = 2$
(c) Discontinuidad infinita en $x = 2$
3. (a) No es continua (discontinuidad evitable)
(b) Es continua ($\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 = g(0)$)
4. En $t = 10$: $\lim_{t \rightarrow 10^-} W(t) = 950$, $W(10) = 900 \rightarrow$ Discontinua
En $t = 20$: $\lim_{t \rightarrow 20^-} W(t) = 900$, $\lim_{t \rightarrow 20^+} W(t) = 900$, $W(20) = 900 \rightarrow$ Continua

Capítulo 3

Propiedades y Cálculo de Límites

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Aplicar las propiedades algebraicas de los límites
- Calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes
- Resolver límites que involucran infinito
- Identificar y trabajar con asíntotas verticales y horizontales

3.1. Reglas algebraicas de límites

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cL$ (para cualquier constante c)
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (si $M \neq 0$)
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$ (para cualquier entero positivo n)
7. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (si $L > 0$ cuando n es par)

3.2. Límites notables

Algunos límites importantes que debemos conocer:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

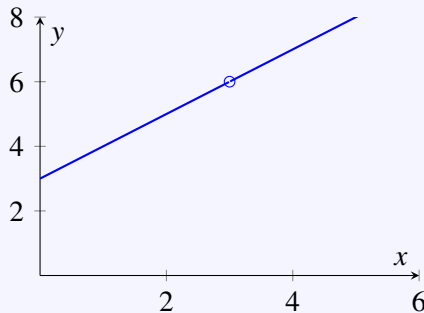
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

Solución: No podemos aplicar directamente la regla del cociente porque el denominador se hace cero. Factorizamos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$$



3.3. Límites al infinito y asíntotas

3.3.1. Límites al infinito

El límite de una función cuando x tiende a infinito describe el comportamiento de la función para valores muy grandes de x .

Definición 3.1. Decimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ si los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L tomando x suficientemente grande.

3.3.2. Asíntotas

- **Asíntota horizontal:** La recta $y = L$ es una asíntota horizontal si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.
- **Asíntota vertical:** La recta $x = a$ es una asíntota vertical si al menos uno de los límites laterales cuando $x \rightarrow a$ es ∞ o $-\infty$.

Ejemplo resuelto

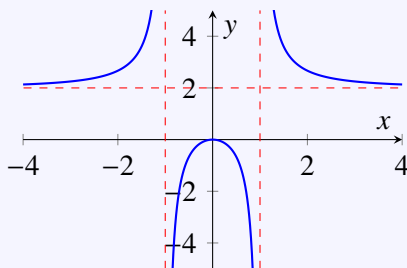
Ejemplo: Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

Asíntota horizontal: $y = 2$

Asíntotas verticales cuando $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = 1$ y $x = -1$.



Ejercicios propuestos

1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

2. Calcule los límites al infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x}{x^3 + 4x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

3. Encuentre todas las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

b) $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

4. Un modelo de población está dado por $P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.5t}}$, donde t es el tiempo en años. ¿Qué sucede con la población a largo plazo ($t \rightarrow \infty$)?

Soluciones

Soluciones:

1. (a) 12 (b) 1/2 (c) 1/4 (d) 3

2. (a) 3/2 (b) 2 (c) 1/2

3. (a) Asíntota vertical: $x = 3$, Asíntota oblicua: $y = x + 3$

(b) Asíntota horizontal: $y = 0$, Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$

(c) Asíntota horizontal: $y = 0$

4. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 1000$. La población se estabiliza en 1000 individuos.

Capítulo 4

La Derivada y su Interpretación

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Comprender la definición formal de derivada como límite
- Calcular derivadas usando la definición por límites
- Interpretar geométricamente la derivada como pendiente de la recta tangente
- Interpretar físicamente la derivada como tasa de cambio instantánea
- Resolver problemas de aplicación de la derivada

4.1. Definición de derivada como límite

Definición 4.1. La *derivada* de una función f en un punto $x = a$ se define como:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe. También se puede expresar como:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si este límite existe, decimos que f es **diferenciable** en $x = a$.

4.2. Pendiente de la recta tangente

Definición 4.2. La *recta tangente* a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que pasa por este punto con pendiente $f'(a)$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplo resuelto

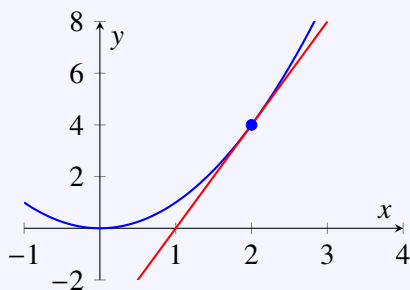
Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 2$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{o} \quad y = 4x - 4$$



4.3. Derivada como tasa de cambio

Definición 4.3. La *derivada* $f'(a)$ representa la **tasa de cambio instantánea** de f en $x = a$. Si $f(t)$ representa la posición de un objeto en el tiempo t , entonces $f'(t)$ representa la **velocidad instantánea**.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Un objeto se mueve según la función posición $s(t) = t^2 + 2t$ (metros), donde t está en segundos. Encontrar la velocidad instantánea en $t = 3$ s.

Solución:

$$\begin{aligned}v(3) &= s'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(3+h) - s(3)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(3+h)^2 + 2(3+h)] - (9+6)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 6 + 2h - 15}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) = 8 \text{ m/s}\end{aligned}$$

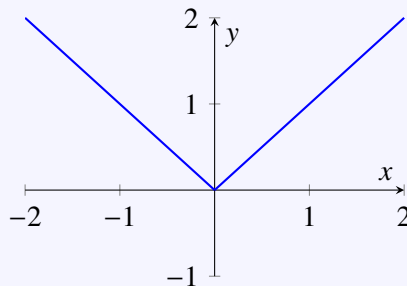
4.4. Derivabilidad y continuidad

Teorema 4.1. Si f es diferenciable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

Importante: El recíproco no es cierto. Una función puede ser continua pero no diferenciable.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ pero no diferenciable en $x = 0$.



La función tiene un "pico" en $x = 0$, por lo que no existe una única recta tangente.

Ejercicios propuestos

1. Use la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ para:
 - a) $f(x) = 3x - 2$
 - b) $f(x) = x^2 - x$
 - c) $f(x) = \sqrt{x}$ (sugerencia: racionalizar)
2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada curva en el punto dado:
 - a) $y = x^3 - 2x$ en $x = 1$
 - b) $y = \frac{1}{x}$ en $x = 2$
 - c) $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 3$
3. Problemas de aplicación:
 - a) La posición de una partícula está dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.
 - b) El costo de producir x unidades es $C(x) = 100 + 5x + 0.1x^2$. Encuentre el costo marginal (tasa de cambio del costo) cuando $x = 10$.
 - c) Un globo esférico se infla de modo que su volumen aumenta a razón de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿Cómo cambia el radio cuando el radio es de 5 cm ?
4. Determine si las siguientes funciones son diferenciables en los puntos indicados:
 - a) $f(x) = |x - 1|$ en $x = 1$
 - b) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

Soluciones

Soluciones:

1. (a) $f'(x) = 3$ (b) $f'(x) = 2x - 1$ (c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. (a) $y = x - 2$ (b) $y = -\frac{1}{4}x + 1$ (c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

3. (a) $v(2) = -3$ unidades/tiempo (b) Costo marginal: \$7 (c) $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}$ cm/s

4. (a) No diferenciable (b) Diferenciable ($f'(2) = 4$ por ambos lados)

Capítulo 5

Reglas de Derivación

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Aplicar las reglas básicas de derivación (suma, producto, cociente)
- Utilizar la regla de la cadena para derivar funciones compuestas
- Derivar funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
- Calcular derivadas de orden superior
- Resolver problemas que combinen múltiples reglas de derivación

5.1. Reglas básicas de derivación

1. **Regla de la constante:** $\frac{d}{dx}[c] = 0$
2. **Regla de la potencia:** $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
3. **Regla del múltiplo constante:** $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$
4. **Regla de la suma:** $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
5. **Regla de la diferencia:** $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5.2. Regla del producto

Teorema 5.1 (Regla del producto). *Si f y g son diferenciables, entonces:*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

5.3. Regla del cociente

Teorema 5.2 (Regla del cociente). Si f y g son diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

5.4. Regla de la cadena

Teorema 5.3 (Regla de la cadena). Si f y g son diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5.5. Derivadas de funciones elementales

$$\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} [\csc x] = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} [\cot x] = -\csc^2 x$$

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Derivar $f(x) = (3x^2 + 2x)^4 \cdot \sin(2x)$

Solución: Usamos la regla del producto:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} [(3x^2 + 2x)^4] \cdot \sin(2x) + (3x^2 + 2x)^4 \cdot \frac{d}{dx} [\sin(2x)] \\&= [4(3x^2 + 2x)^3 \cdot (6x + 2)] \cdot \sin(2x) + (3x^2 + 2x)^4 \cdot [\cos(2x) \cdot 2] \\&= 4(3x^2 + 2x)^3(6x + 2) \sin(2x) + 2(3x^2 + 2x)^4 \cos(2x)\end{aligned}$$

5.6. Derivadas de orden superior

La **segunda derivada** de f es la derivada de f' , denotada por $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$. Representa la tasa de cambio de la tasa de cambio.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Para $f(x) = x^3 - 2x$, encontrar $f''(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

Ejercicios propuestos

1. Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$

b) $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

c) $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

d) $y = e^{3x} \cos(2x)$

e) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

f) $g(x) = \sin^3(2x + 1)$

2. Encuentre la segunda derivada de:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{x + 1}$

c) $h(x) = e^{-x^2}$

3. Problemas de aplicación:

a) Si la posición de una partícula es $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$, encuentre su aceleración en $t = 2$.

b) El ingreso por vender x unidades es $R(x) = 100x - 0.1x^2$. Encuentre el ingreso marginal cuando $x = 50$.

c) Un cultivo de bacterias crece según $N(t) = 1000e^{0.2t}$. ¿A qué tasa está cambiando la tasa de crecimiento cuando $t = 5$?

4. Derive usando regla de la cadena:

a) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

b) $f(x) = (2x^3 - x)^{2/3}$

c) $g(x) = \ln(\sin x)$

Soluciones

Soluciones:

1. (a) $12x^3 - 6x^2 + 5$ (b) $6x^2 + 2x - 6$ (c) $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$
(d) $3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x)$ (e) $\frac{2x}{x^2 + 4}$ (f) $6 \sin^2(2x + 1) \cos(2x + 1)$
2. (a) $12x^2 - 6$ (b) $\frac{2}{(x + 1)^3}$ (c) $2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$
3. (a) $a(2) = 4$ (b) Ingreso marginal: \$90 (c) $N''(5) = 40e \approx 108.73$
4. (a) $\frac{-\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}}$ (b) $\frac{2(6x^2 - 1)}{3(2x^3 - x)^{1/3}}$ (c) $\cot x$

Capítulo 6

Aplicaciones de la Derivada

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de funciones
- Encontrar valores críticos y puntos extremos (máximos y mínimos)
- Aplicar el criterio de la primera y segunda derivada
- Resolver problemas de optimización en contextos reales
- Analizar la concavidad y puntos de inflexión de funciones

6.1. Crecimiento y decrecimiento

Teorema 6.1 (Criterio de la primera derivada). *Sea f una función diferenciable en (a, b) .*

- Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b) , entonces f es creciente en (a, b) .
- Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) , entonces f es decreciente en (a, b) .

6.2. Valores críticos y extremos

Definición 6.1. *Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.*

Teorema 6.2 (Teorema de los valores extremos). *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en $[a, b]$.*

6.3. Criterio de la primera derivada

Teorema 6.3 (Criterio de la primera derivada). *Sea c un número crítico de f .*

- *Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .*
- *Si f' cambia de negativa a positiva en c , entonces f tiene un mínimo local en c .*
- *Si f' no cambia de signo en c , entonces f no tiene extremo local en c .*

6.4. Criterio de la segunda derivada

Teorema 6.4 (Criterio de la segunda derivada). *Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y f'' existe en un intervalo abierto que contiene a c .*

- *Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c .*
- *Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c .*
- *Si $f''(c) = 0$, el criterio no decide.*

6.5. Concavidad y puntos de inflexión

Definición 6.2. *Una función f es **cóncava hacia arriba** en un intervalo si f' es creciente en ese intervalo (equivalente a $f'' > 0$).*

*Una función f es **cóncava hacia abajo** en un intervalo si f' es decreciente en ese intervalo (equivalente a $f'' < 0$).*

Definición 6.3. *Un **punto de inflexión** es un punto donde la gráfica de f cambia de concavidad.*

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Analizar la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

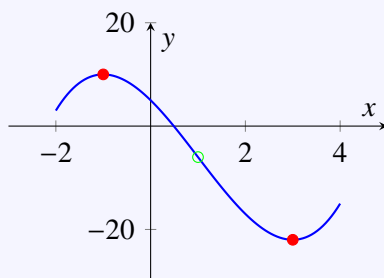
Valores críticos: $x = -1, x = 3$

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

Intervalos de decrecimiento: $(-1, 3)$

Máximo local en $x = -1$, mínimo local en $x = 3$

Punto de inflexión en $x = 1$



6.6. Problemas de optimización

Los problemas de optimización implican encontrar valores máximos o mínimos de una función en un contexto aplicado.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio 2.

Solución: Sea x la mitad de la base del rectángulo. La altura es $\sqrt{4 - x^2}$.

El área es:

$$A(x) = 2x \cdot \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Maximizamos $A(x)$ derivando e igualando a cero.

Ejercicios propuestos

1. Para cada función, determine:
 - a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
 - b) Valores críticos y extremos locales
 - c) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión
 - a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
 - b) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
 - c) $h(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
2. Resuelva los siguientes problemas de optimización:
 - a) Encuentre dos números positivos cuya suma sea 50 y cuyo producto sea máximo.
 - b) Una caja rectangular sin tapa se fabrica con 12 m² de cartón. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen?
 - c) Un agricultor tiene 400 m de cerca para delimitar un terreno rectangular junto a un río (no necesita cerca del lado del río). ¿Qué dimensiones maximizan el área?
3. Use el criterio de la segunda derivada para clasificar los extremos locales de:
 - a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$
 - b) $g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
 - c) $h(x) = \frac{x^2}{x - 1}$
4. Analice completamente la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (dominio, interceptos, simetría, asíntotas, intervalos de crecimiento/decrecimiento, extremos, concavidad, puntos de inflexión, gráfica).

Soluciones

Soluciones:

1. (a) Crece: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, Decrece: $(1, 3)$, Mínimo en $x = 3$, Máximo en $x = 1$, Cóncava abajo: $(-\infty, 2)$, Cóncava arriba: $(2, \infty)$, Punto inflexión: $x = 2$
(b) Crece: $(0, \infty)$, Decrece: $(-\infty, 0)$, Mínimo en $x = 0$, Cóncava arriba: $(-1, 1)$, Cóncava abajo: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, Puntos inflexión: $x = \pm 1$
(c) Crece: $(3, \infty)$, Decrece: $(-\infty, 3)$, Mínimo en $x = 3$, Cóncava arriba: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, Cóncava abajo: $(0, 2)$, Puntos inflexión: $x = 0, x = 2$
2. (a) 25 y 25 (b) $2\text{m} \times 2\text{m} \times 1\text{m}$ (c) $100\text{m} \times 200\text{m}$
3. (a) Máximo en $x = -1$, Mínimo en $x = 3$ (b) Mínimo en $x = 1$ (c) Máximo en $x = 0$, Mínimo en $x = 2$
4. Dominio: $\mathbb{R}$, Interceptos: $x = -2, x = 1; y = 2$, No simetría, Sin asíntotas, Crece: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, Decrece: $(-1, 1)$, Máximo en $x = -1$, Mínimo en $x = 1$, Cóncava abajo: $(-\infty, 0)$, Cóncava arriba: $(0, \infty)$, Punto inflexión: $x = 0$

Capítulo 7

Razones de Cambio y Rectas Tangentes

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Resolver problemas de razones de cambio relacionadas
- Encontrar ecuaciones de rectas tangentes y normales a curvas
- Aplicar conceptos de derivada en problemas de física y geometría
- Modelar situaciones reales usando razones de cambio
- Interpretar resultados en contexto

7.1. Razones de cambio relacionadas

Los problemas de razones de cambio relacionadas involucran encontrar la tasa de cambio de una cantidad en términos de la tasa de cambio de otra cantidad relacionada.

Proposición 7.1 (Estrategia para razones de cambio relacionadas). *1. Identificar todas las cantidades variables y constantes. Dibujar un diagrama si es posible.*

2. Escribir la ecuación que relaciona las variables.

3. Derivar ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo t .

4. Sustituir los valores conocidos y resolver para la razón de cambio desconocida.

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Un globo esférico se infla a razón de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿A qué razón aumenta el radio cuando el radio es de 5 cm ?

Solución: Volumen de esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Sustituimos valores conocidos ($\frac{dV}{dt} = 100$, $r = 5$):

$$100 = 4\pi(5)^2 \frac{dr}{dt} = 100\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ cm/s}$$

7.2. Rectas tangentes y normales

Definición 7.1. La **recta normal** a una curva en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, entonces la pendiente de la normal es $m_n = -\frac{1}{f'(a)}$ (si $f'(a) \neq 0$).

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Encontrar las ecuaciones de la tangente y normal a la curva $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

Solución:

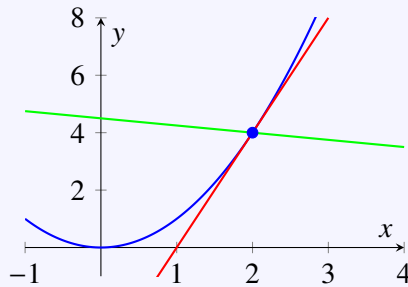
$$f'(x) = 2x$$

$$m_t = f'(2) = 4$$

$$m_n = -\frac{1}{4}$$

Ecuación tangente: $y - 4 = 4(x - 2)$ o $y = 4x - 4$

Ecuación normal: $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ o $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$



7.3. Aplicaciones en física

Las derivadas tienen numerosas aplicaciones en física:

- **Posición, velocidad, aceleración:** $v(t) = s'(t)$, $a(t) = v'(t) = s''(t)$
- **Razones de cambio:** Cómo cambian cantidades físicas con el tiempo
- **Optimización:** Encontrar valores máximos/mínimos en sistemas físicos

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 20 m/s desde una altura de 10 m. La altura está dada por $s(t) = -4.9t^2 + 20t + 10$. Encontrar:

1. La velocidad en cualquier tiempo t
2. El tiempo para alcanzar la altura máxima
3. La altura máxima
4. La velocidad al impactar el suelo

Solución:

1. $v(t) = s'(t) = -9.8t + 20$
2. $v(t) = 0 \Rightarrow -9.8t + 20 = 0 \Rightarrow t \approx 2.04 \text{ s}$
3. $s(2.04) \approx -4.9(2.04)^2 + 20(2.04) + 10 \approx 30.41 \text{ m}$
4. Resolver $s(t) = 0$ para encontrar tiempo de impacto, luego $v(t)$ en ese tiempo

Ejercicios propuestos

1. Resuelva los siguientes problemas de razones de cambio relacionadas:
 - a) Una escalera de 5 m está apoyada contra una pared. Si el pie de la escalera se desliza alejándose de la pared a 0.5 m/s, ¿a qué velocidad baja el extremo superior cuando el pie está a 3 m de la pared?
 - b) Un tanque cónico invertido tiene radio superior de 2 m y altura de 4 m. Si se vierte agua a razón de $1 \text{ m}^3/\text{min}$, ¿a qué velocidad sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 2 m?
 - c) Una persona de 1.8 m de altura camina alejándose de un poste de 6 m a razón de 1 m/s. ¿A qué velocidad crece su sombra?
2. Encuentre las ecuaciones de la recta tangente y normal a:
 - a) $y = x^3 - 2x$ en $x = 1$
 - b) $y = \sqrt{x}$ en $x = 4$
 - c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ en $x = 0$
3. Problemas de aplicación en física:
 - a) Un objeto se mueve según $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Encuentre:
 - 1) La velocidad y aceleración en cualquier tiempo
 - 2) Cuándo el objeto está en reposo
 - 3) Cuándo está acelerando y desacelerando
 - b) Se dispara un proyectil verticalmente con $s(t) = -5t^2 + 40t$. Encuentre la altura máxima y el tiempo para alcanzarla.
 - c) Un circuito eléctrico tiene voltaje $V(t) = 120 \sin(120\pi t)$. Encuentre la razón de cambio del voltaje en $t = 0.01 \text{ s}$.
4. Un depósito cilíndrico de radio 3 m se llena a razón de $2 \text{ m}^3/\text{min}$. ¿A qué velocidad aumenta la altura del agua?

Soluciones

Soluciones:

1. (a) -0.375 m/s (b) $\frac{1}{\pi} \text{ m/min}$ (c) 0.4286 m/s

2. (a) Tangente: $y = x - 2$, Normal: $y = -x$ (b) Tangente: $y = \frac{1}{4}x + 1$, Normal: $y = -4x + 9$ (c) Tangente: $y = 1$, Normal: $x = 0$

3. (a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $a(t) = 6t - 12$, En reposo: $t = 1$, $t = 3$, Acelera: $t > 2$, Desacelera: $t < 2$ (b) Altura máxima: 80 m , Tiempo: 4 s (c) $V'(0.01) = 120(120\pi) \cos(120\pi \cdot 0.01) \approx 45238.9 \text{ V/s}$

4. $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} \text{ m/min}$

Capítulo 8

Integral Definida como Área

Objetivos de aprendizaje

Al finalizar este módulo, el estudiante será capaz de:

- Comprender el concepto de antiderivada
- Calcular integrales definidas usando sumas de Riemann
- Interpretar la integral definida como área bajo una curva
- Calcular áreas entre curvas usando integración
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo

8.1. Antiderivadas

Definición 8.1. Una función F se llama **antiderivada** de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

Teorema 8.1. Si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces la antiderivada más general de f en I es:

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

8.2. Sumas de Riemann e integral definida

Definición 8.2. La **suma de Riemann** de f en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y x_i^* es un punto en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Definición 8.3. La *integral definida* de f desde a hasta b es:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

si este límite existe.

8.3. Interpretación como área

Teorema 8.2. Si f es continua y no negativa en $[a, b]$, entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b es:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

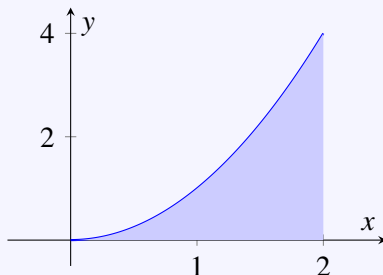
Ejemplo resuelto

Ejemplo: Calcular el área bajo $f(x) = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$ usando sumas de Riemann.

Solución: Dividimos $[0, 2]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{2}{n}$.

Usamos el punto derecho $x_i^* = i\Delta x$:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(i \cdot \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(i \cdot \frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(2n^3 + 3n^2 + n)}{6n^3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



8.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema 8.3 (Teorema Fundamental del Cálculo, Parte 1). *Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por:*

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b$$

es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , y $g'(x) = f(x)$.

Teorema 8.4 (Teorema Fundamental del Cálculo, Parte 2). *Si f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en $[a, b]$, entonces:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

8.5. Área entre curvas

Teorema 8.5. *El área entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$, donde $f(x) \geq g(x)$, es:*

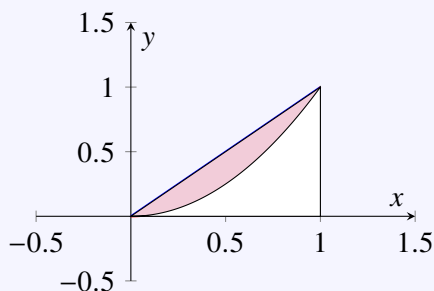
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Ejemplo resuelto

Ejemplo: Encontrar el área entre $y = x^2$ y $y = x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

Solución: En $[0, 1]$, $x \geq x^2$, entonces:

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



Ejercicios propuestos

1. Calcule las siguientes integrales usando sumas de Riemann:
 - a) $\int_0^3 (2x + 1) dx$
 - b) $\int_1^4 x^2 dx$
2. Use el Teorema Fundamental del Cálculo para evaluar:
 - a) $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$
 - b) $\int_1^4 \sqrt{x} dx$
 - c) $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$
3. Encuentre el área de las regiones siguientes:
 - a) Bajo $y = 4 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$
 - b) Entre $y = x$ y $y = x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$
 - c) Entre $y = \sin x$ y $y = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/4$
4. Problemas de aplicación:
 - a) La velocidad de un automóvil está dada por $v(t) = 3t^2 - 2t + 5$ m/s. Encuentre la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 3$ s.
 - b) El ingreso marginal de una empresa es $R'(x) = 100 - 0.02x$. Encuentre el ingreso total al vender 100 unidades.
 - c) La tasa de cambio de la población es $P'(t) = 100e^{0.1t}$. Si $P(0) = 1000$, encuentre $P(5)$.

Soluciones

Soluciones:

1. (a) 12 (b) 21
2. (a) 1 (b) $\frac{14}{3}$ (c) 1
3. (a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\sqrt{2} - 1$
4. (a) 33 m (b) \$9900 (c) $P(5) = 1000 + 100 \int_0^5 e^{0.1t} dt \approx 1000 + 100(6.487) = 1648.7$

Capítulo 9

Hoja de Ejercicios Finales

Ejercicios globales de repaso

Límites y continuidad

1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x - 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

2. Determine la continuidad de las funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ en } x = 2$

b) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ en } x = 1$

c) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ en } x = 0$

Derivadas

3. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$

b) $g(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

c) $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

d) $y = e^{2x} \cos(3x)$

e) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

f) $g(x) = \sin^3(2x + 1)$

4. Encuentre la ecuación de la recta tangente a:

a) $f(x) = x^3 - 2x$ en $x = 1$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$

Aplicaciones de derivadas

5. Para cada función, determine:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Valores críticos y extremos locales

c) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

para:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

b) $g(x) = x^4 - 4x^3$

Soluciones

Límites y continuidad

1. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{2x} = \frac{5}{2}$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^2+4x-5} = 3$
d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$
2. a) $f(2) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \rightarrow$ Continua
b) $g(1)$ no definida $\rightarrow$ Discontinua evitable
c) $h(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \rightarrow$ Continua

Derivadas

3. a) $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$
b) $g'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 6x^2 + 2x - 6$
c) $h'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$
d) $y' = 2e^{2x} \cos(3x) - 3e^{2x} \sin(3x)$
e) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$
f) $g'(x) = 3 \sin^2(2x+1) \cos(2x+1) \cdot 2 = 6 \sin^2(2x+1) \cos(2x+1)$
4. a) $f(1) = -1$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$
Ecuación: $y + 1 = 1(x - 1)$ o $y = x - 2$
b) $f(4) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$
Ecuación: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ o $y = \frac{1}{4}x + 1$
c) $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$
Ecuación: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$ o $y = -\frac{1}{4}x + 1$

Aplicaciones de derivadas

5. a) ■ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$
Crece: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, Decece: $(1, 3)$
Máximo en $x = 1$, Mínimo en $x = 3$
■ $f''(x) = 6x - 12$
Cóncava abajo: $(-\infty, 2)$, Cóncava arriba: $(2, \infty)$
Punto de inflexión: $x = 2$

- b) ■ $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$
Crece: $(3, \infty)$, Decece: $(-\infty, 3)$
Mínimo en $x = 3$
- $g''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$
Cónca arriba: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, Cónca abajo: $(0, 2)$
Puntos de inflexión: $x = 0, x = 2$

Capítulo 10

Quiz Final

Instrucciones

Resuelva los siguientes problemas en 90 minutos. Muestre todo su trabajo. Puede usar calculadora científica pero no dispositivos con capacidad simbólica.

Parte I: Conceptos básicos (20 puntos)

1. Defina con sus propias palabras:
 - a) Límite de una función
 - b) Derivada de una función
 - c) Continuidad de una función
2. Enuncie:
 - a) El Teorema Fundamental del Cálculo (Parte 2)
 - b) La regla de la cadena para derivación
 - c) El criterio de la primera derivada para extremos locales

Parte II: Cálculos (40 puntos)

3. Calcule los siguientes límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$
 - c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4}$
4. Derive las siguientes funciones:
 - a) $f(x) = (2x^3 - x)^4$
 - b) $g(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
 - c) $h(x) = \ln(\sin x)$

5. Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$

b) $\int_0^1 (2x + 3)dx$

c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Parte III: Aplicaciones (40 puntos)

6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 2x$ en el punto donde $x = 1$.
7. Un globo esférico se infla a razón de $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿A qué razón aumenta el radio cuando el radio es de 5 cm?
8. Para la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$:
 - a) Encuentre los valores críticos.
 - b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - c) Clasifique los extremos locales usando el criterio de la primera derivada.

Soluciones del Quiz Final

Parte I: Conceptos básicos

- a) El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L si los valores de $f(x)$ se aproximan arbitrariamente a L cuando x se aproxima suficientemente a a .
 - b) La derivada de f en x es la tasa de cambio instantánea de f en ese punto, definida como $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
 - c) Una función es continua en $x = a$ si $f(a)$ está definida, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- a) Si f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f , entonces $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
 - b) Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.
 - c) Si $f'(c) = 0$ o no existe, y f' cambia de signo en c , entonces f tiene un extremo local en c .

Parte II: Cálculos

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$
 - c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4} = 2$
- a) $f'(x) = 4(2x^3 - x)^3(6x^2 - 1)$
 - b) $g'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2+1)^2}$
 - c) $h'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$
- a) $\int (3x^2 - 2x + 1) dx = x^3 - x^2 + x + C$
 - b) $\int_0^1 (2x + 3) dx = [x^2 + 3x]_0^1 = 4$
 - c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 4 - 2 = 2$

Parte III: Aplicaciones

- $f(1) = -1$, $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f'(1) = 1$,
Ecuación: $y + 1 = 1(x - 1)$ o $y = x - 2$
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$,
 $100 = 4\pi(25) \frac{dr}{dt}$, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ cm/s}$

8. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$

Valores críticos: $x = -1, x = 3$

b) Crece: $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, Decrece: $(-1, 3)$

c) Máximo local en $x = -1$, mínimo local en $x = 3$